# 16 – EPREUVE - 1998

## 16 – 1 - SUJET

**Durée : 2 heures.**
**Barème : exercice I = 11 points - exercice II = 9 points.**

## EXERCICE I

**REMARQUE : Dans tout l'exercice on arrondira les résultats à $10^{-2}$ près.**

Une entreprise fabrique des plaquettes dont la longueur et la largeur sont mesurées en millimètre.

**Partie A :**

Sur un échantillon de 100 plaquettes on a mesuré la longueur de chaque plaquette et obtenu le tableau suivant :

| Longueur | effectifs |
|---|---|
| [ 35 ; 37 [ | 3 |
| [ 37 ; 39 [ | 25 |
| [ 39 ; 41 [ | 50 |
| [ 41 ; 43 [ | 20 |
| [ 43 ; 45 [ | 2 |

**a -** On veut calculer une valeur approchée de la moyenne $m$ et de l'écart type $s$ de l'échantillon. Pour cela on fait comme si toutes les observations d'une classe étaient situées au centre de la classe.

Calculer $m$ et $s$. Compte tenu de l'erreur de méthode induite par l'approximation précédente, les résultats seront donnés à $10^{-1}$ près.

**b -** On suppose que la variable aléatoire L qui à chaque plaquette associe sa longueur suit une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart type 1,6.

Donner une estimation ponctuelle de $\mu$.

Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de $\mu$ centré sur la valeur obtenue précédemment.

**Partie B :**

On suppose dans cette partie que L suit une loi normale de moyenne 40 et d'écart type 1,6 et que la largeur $l$ suit une loi normale de moyenne 25 et d'écart type 1,2.

**a -** On tire au hasard dans la production une plaquette.

Quelle est la probabilité d'obtenir une longueur comprise entre 37 mm et 43 mm ?

Quelle est la probabilité d'obtenir une largeur comprise entre 22 mm et 28 mm ?

**b -** Une plaquette est acceptée si sa longueur est comprise entre 37 mm et 43 mm et si sa largeur est comprise entre 22 mm et 28 mm.

En admettant que L et $l$ sont des variables aléatoires indépendantes, quelle est la probabilité d'obtenir une plaquette qui soit acceptée ?

**Partie C :**

La probabilité d'obtenir une plaquette qui soit rejetée est égale à 0,07. On appelle X la variable aléatoire qui à un lot de 100 plaquettes extraites de la fabrication associe le nombre de plaquettes rejetées contenues dans ce lot.

**a -** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres et son espérance mathématique.

**b -** En admettant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson, préciser son paramètre.

Quelle est, alors, la probabilité d'obtenir strictement moins de 10 plaquettes rejetées dans un lot de 100 plaquettes ?

## EXERCICE II

L'étude d'un mouvement amorti amène à considérer la fonction $f$, telle que :

$$f(t)=0\,;\text{pour } t<0.$$
$$f''(t)+2f'(t)+2f(t)=e^{-t}\,;\text{pour } t>0$$
$$f(0)=1 \text{ et } f'(0)=0.$$

où $f'(t)$ et $f''(t)$ sont les dérivées, respectivement, première et seconde de la fonction $f(t)$.

**Partie A : Détermination de la transformée de Laplace de $f$.**

Nous allons utiliser la transformation de Laplace pour résoudre cette équation différentielle. Pour cela nous supposons que $f$ et ses dérivées premières et seconde admettent des transformées de Laplace. On désigne par F la transformée de Laplace de la fonction $f$, et on la note par : $F(p) = L\left[f(t)\right]$.

**1 -** Calculer, en fonction de $F(p)$, les transformées de Laplace de $f''(t)$ et de $f'(t)$ notées respectivement par $L\left[f''(t)\right]$ et $L\left[f'(t)\right]$.

En déduire $L\left[f''(t) + 2f'(t) + 2f(t)\right]$ la transformée de Laplace de $\left[f''(t)+2f'(t)+2f(t)\right]$.

**2 -** Calculer $L\left[e^{-t}U(t)\right]$ où U est la fonction échelon unité.

**3 -** En déduire $F(p)$.

**Partie B : Détermination de $f$.**

**1 -** Vérifier que :

$$\frac{1}{(p+1)\left(p^2+2p+2\right)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+2p+2}$$

# 17 – EPREUVE - 1999

## 17 – 1 - SUJET

**Durée : 2 heures.**
**Barème : exercice I = 9 points - exercice II = 11 points.**

## EXERCICE I

REMARQUE : **Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.**

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : $P_1$ et $P_2$.

1 – Une pièce $P_1$ est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5.
On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce $P_1$ choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur. On suppose que L suit la loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3.
Déterminer, à $10^{-2}$ près, la probabilité qu'une pièce $P_1$ soit bonne.

2 – On note A l'événement : « une pièce $P_1$ choisie au hasard dans la production des pièces $P_1$ est défectueuse ».
On note de même B l'événement : « une pièce $P_2$ choisie au hasard dans la production des pièces $P_2$ est défectueuse ».

On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}07$ et on suppose que ces deux évènements sont indépendants.
Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à $10^{-4}$ près, la probabilité de chacun des évènements suivants :

$E_1$ : « les deux pièces du module sont défectueuses » ;

$E_2$ : « au moins une des deux pièces du module est défectueuse » ;

$E_3$ : « aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse ».

3 – Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules, associe le nombre de modules réalisant l'événement $E_3$ défini au 2 -.
On suppose que la probabilité de l'événement $E_3$ est 0,902.

3 - a – Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

3 - b – Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement $E_3$.

4 – Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces $P_2$.
Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces $P_2$ prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne inconnue $\mu$ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{60}}$ avec $\sigma = 0{,}084$.

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces $P_2$ d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production de la journée.
On constate que la valeur approchée arrondie à $10^{-3}$ près de la moyenne $\bar{x}$ de cet échantillon est $\bar{x} = 4{,}012$.

4 - a - A partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à $10^{-3}$ près, de la moyenne $\mu$ du diamètre des pièces $P_2$ produites pendant cette journée.

4 - b – Déterminer un intervalle de confiance centré en $\bar{x}$ de la moyenne $\mu$ des diamètres des pièces $P_2$ produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance 95%.

4 – c – On considère l'affirmation suivante : « la moyenne $\mu$ est obligatoirement entre 3,991 et 4,033 ».
Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

## EXERCICE II

**REMARQUE : Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.**

**Partie A : Résolution d'une équation différentielle.**

On considère l'équation différentielle ( E ) : $y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$ ; où $y$ désigne une fonction de la variable réelle $x$ définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des réels, $y'$ la fonction dérivée de $y$ et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

**1 –** Résoudre l'équation différentielle ( E ' ) : $y'' - 2y' + y = 0$.

**2 –** Déterminer les constantes réelles $a$, $b$, $c$ pour que la fonction $g$ définie, sur l'ensemble des réels, par : $g(x) = ax^2 + bx + c$, soit une solution particulière de l'équation ( E ).

**3 –** En déduire la solution générale de l'équation différentielle ( E ).

**4 –** Déterminer la solution $f$ de l'équation ( E ) qui vérifie les conditions initiales suivantes : $f(0) = 0$ et $f(1) = e + \frac{3}{2}$.

**Partie B : Etude d'une fonction.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies, sur l'ensemble des réels, par :

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note, respectivement, par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$ - unité graphique 2 cm.

**1 –** Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$. Interpréter graphiquement le dernier résultat.

**2 –** Etudier la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

**3 – a –** Démontrer, pour tout réel $x$, que : $f'(x) = (x+1)(e^x+1)$.

**3 – b –** Etudier, sur l'ensemble des réels, les variations de $f$.

**4 –** Construire, dans le repère $(O\,;\ \vec{i}\,;\ \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

**5 –** Donner la valeur exacte, en $cm^2$, de l'aire A de la partie, du plan, limitée par les courbes $\mathscr{C}$ , $\mathscr{P}$ , et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$. Donner une valeur approchée, à $10^{-2}$ près, de l'aire A.

## 17 – 2 – SOLUTION

## EXERCICE I

**1 –** Une pièce $P_1$ est bonne si sa longueur L appartient à l'intervalle $[293{,}5\ ;\ 306{,}5]$.

L est une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(300\ ;\ 3)$.

Déterminons à $10^{-2}$ près, la probabilité pour qu'une pièce soit bonne.

$P(293{,}5 \leq L \leq 306{,}5) = P(t_1 \leq T \leq t_2)$

où $T$ est la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, et

$t_1 = \dfrac{293{,}5 - 300}{3} = -2{,}16\ ;\ t_2 = \dfrac{306{,}5 - 300}{3} = +2{,}16.$

$P(-2{,}16 \leq T \leq +2{,}16) = \Pi(+2{,}16) - \Pi(-2{,}16) = 2\Pi(+2{,}16) - 1$

Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, nous obtenons :

$\boxed{P(293{,}5 \leq L \leq 306{,}5) = 2 \times 0{,}9842 - 1 = 0{,}97}$ à $10^{-2}$ près.

**2 –** $A$ l'événement : « une pièce $P_1$ choisie au hasard dans la production des pièces $P_1$ est défectueuse », avec $P(A) = 0{,}03$.

$B$ l'événement : « une pièce $P_2$ choisie au hasard dans la production des pièces $P_2$ est défectueuse », avec $P(B) = 0{,}07$.

Calculons la probabilité de l'événement $E_1$ à $10^{-4}$ près.

Tout d'abord, exprimons $E_1$ en fonction de $A$ et $B$.

$E_1 = A \cap B$ avec $A$ et $B$ indépendants par hypothèse, par conséquent

$\boxed{P(E_1) = P(A) \times P(B) = 0{,}03 \times 0{,}07 = 0{,}0021}$

Calculons la probabilité de l'événement $E_2$ à $10^{-4}$ près.

Exprimons $E_2$ en fonction de $A$ et $B$.

$E_2 = A \cup B \Rightarrow P(E_2) = P(A \cup B)$

or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## EXERCICE 1

(6 points)

**Loi normale, intervalle centré sur la moyenne, et de probabilité donnée.**

**Loi binomiale et loi de Poisson.**

Une machine fabrique des résistors. La variable aléatoire $X$ associe à chaque résistor sa résistance exprimée en ohms.

*N.B. : Les parties I et II sont indépendantes.*

**I.** On suppose que $X$ suit une loi normale de moyenne $m = 100$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1°) On prélève un résistor au hasard. Il est conforme si sa résistance est comprise entre 94,75 et 105,25 Ohms.

Quelle est la probabilité, à $10^{-2}$ près, que le résistor ne soit pas conforme ?

2°) Déterminer le nombre réel $a$ tel que 97 % des résistors produits par la machine aient une résistance comprise entre $100 - a$ et $100 + a$ ohms.

**II.** On admet dans cette partie que le pourcentage de résistors non conformes fabriqués par la machine est de 8 %.

Un tirage au hasard de 50 résistors de cette fabrication est assimilé à un tirage avec remise. On appelle $Y$ la variable aléatoire qui associe à chacun de ces tirages le nombre de résistors non conformes obtenus parmi les 50.

1°)

a) Indiquer quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y$.

b) Calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité d'obtenir exactement deux résistors non conformes.

2°) On admet qu'on peut approcher la loi de Y par une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

a) Préciser $\lambda$.

b) En utilisant la loi approchée, calculer, à $10^{-3}$ près, la probabilité d'obtenir au plus trois résistors non conformes dans le tirage.

## CORRECTION

**I.** 1°) Soit $p_1$ la probabilité de l'événement « le résistor n'est pas conforme », on a :

$$1 - p_1 = P(94{,}75 \leq X \leq 105{,}25)$$

Si on pose $T = \dfrac{X - 100}{3}$, alors T suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ (loi normale centrée réduite) de fonction de répartition $\Pi$ donnée par la table du formulaire.

Nous avons alors :

$$94{,}75 < X < 105{,}25 \Leftrightarrow \frac{94{,}75 - 100}{3} < \frac{X - 100}{3} < \frac{105{,}25 - 100}{3}$$

$$94{,}75 < X < 105{,}25 \Leftrightarrow -1{,}75 < T < 1{,}75$$

Ainsi :

$$1 - p_1 = P(-1{,}75 < T < 1{,}75) = \Pi(1{,}75) - \Pi(-1{,}75)$$

$$1 - p_1 = \Pi(1{,}75) - [1 - \Pi(1{,}75)] = 2\Pi(1{,}75) - 1$$

donc, à $10^{-2}$ près, on obtient :

$$p_1 = 0{,}08$$

2°) On cherche $a$ réel tel que P(100 – $a$ ≤ X ≤ 100 + $a$) = 0,97.
On procède comme dans 1°).

$$100 - a < X < 100 + a \Leftrightarrow -\frac{a}{3} < \frac{X - 100}{3} < +\frac{a}{3}$$

Ainsi :

$$0{,}97 = P\left(-\frac{a}{3} < T < +\frac{a}{3}\right) = \Pi\left(\frac{a}{3}\right) - \Pi\left(-\frac{a}{3}\right) = \Pi\left(\frac{a}{3}\right) - \left[1 - \Pi\left(\frac{a}{3}\right)\right]$$

$$0{,}97 = 2\Pi\left(\frac{a}{3}\right) - 1$$

d'où

$$\Pi\left(\frac{a}{3} = 0{,}985\right)$$

Avec la lecture réciproque de la table en $\Pi$ on obtient $\Pi(2{,}17) = 0{,}985$ d'où $\frac{a}{3} = 2{,}17$.

Donc :

$$a = 6{,}51$$

**II.1°)**

a) Soit l'épreuve qui consiste à prélever un résistor dans la fabrication. Elle conduit à une alternative : un "succès" ($S$ : le résistor est non conforme) avec une probabilité $p = 0{,}8$ ou un "échec" ($\bar{S}$ : le résistor est acceptable) avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}92$. L'expérience décrite (tirage de l'échantillon avec remise) consiste à répéter 50 fois cette épreuve avec indépendance d'une épreuve par rapport aux épreuves antérieures.

Dans ces conditions, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}$(n = 50 ; p = 0,08).

b) On demande $P(Y = 2)$. Or, $P(Y = k) = C_{50}^{k}(0{,}08)^{k}0{,}92^{50-k}$.

Avec k = 2, on obtient :

$$C_{50}^{2}(0{,}08)^{2}0{,}92^{48} = \frac{50\times 49}{2}(0{,}08)^{2}0{,}92^{48} = 0{,}143$$

Ainsi, à $10^{-3}$ près :

$$P(Y = 2) = 0{,}143$$

2°)

a) La variable Y est approchée par une variable aléatoire $Z$ qui suit une loi de Poisson dont le paramètre $\lambda$ est la valeur moyenne de Y, soit :

$$\lambda = E(Y) = np = 4$$

b) La probabilité d'obtenir l'événement « au plus trois résistors non conformes » est :

$$p_2 = P(Z \leq 3) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3)$$

En utilisant la table de la loi de Poisson de paramètre 4, ou bien le calcul sachant que : $P(Z = k) = \dfrac{\lambda^{k}\,e^{-\lambda}}{k!}$, on obtient, à $10^{-3}$ près :

$$p_2 = p_2 = e^{-4}\left(1+\frac{4}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}\right) = 0{,}433.$$

## EXERCICE 2

(7 points)

**Développement en série de Fourier. Convergence d'une série numérique, et calcul de la somme en utilisant une série de Fourier.**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur IR, paire, périodique de période 2 et telle que

$$f(t) = 2t - 1 \text{ si } t \in [0;1].$$

1°) Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, construire la représentation graphique de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-3,+3]$.

2°) On suppose que $f$ satisfait aux conditions de Dirichlet.

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$ le développement en série de Fourier associé à $f$.

a) Justifier que $b_n = 0$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

b) Calculer $a_0$ et $\omega$.

c) Calculer $a_n$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$. On précisera les coefficients $a_{2p-1}$ et $a_{2p}$, avec $p$ dans $\mathbb{N}^*$.

d) Vérifier que $S(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)\pi\, t)$ et justifier que $S(t) = f(t)$ pour tout nombre réel $t$.

3°) *Application à la recherche de la somme d'une série numérique.*

Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{(2p+1)^2}$, $p \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que cette série est convergente.

b) En utilisant la question 2°)d) et en prenant $t = 0$, calculer la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$.

CORRECTION

1°)

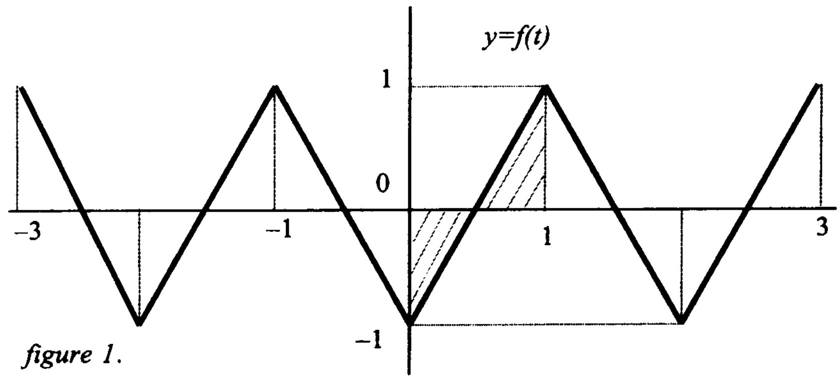


*figure 1.*

2°)

a) La fonction $f$ est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

b) Le calcul peut s'effectuer sur une demi-période puisque $f$ est paire :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt = \frac{2}{2}\int_0^1 (2t-1)\, dt = \left[t^2 - t\right]_0^1 = 0$$

c) Ici $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, et le calcul peut s'effectuer sur une demi-période car l'intégrant $t \mapsto f(t)\cos(n\omega\, t)$ est une fonction paire :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega\ t)\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega\ t)\, dt = 2\int_0^1 (2t-1)\cos(n\pi\, t)\, dt$$

# BTS CIRA 1996

## EXERCICE 1

(8 points)

**Transformation de Fourier. Spectre ; formule de Parseval.**

1°) Soit $n$ entier naturel non nul. On pose :

$$A_n = \int_0^\pi (t-\pi)^2 \cos(nt)\,dt \text{ et } I_n = \int_0^\pi (t-\pi)\sin(nt)\,dt$$

Montrer en intégrant par parties, que :

$$I_n = -\frac{\pi}{n} \text{ et } A_n = \frac{2\pi}{n^2}$$

2°) On considère un signal périodique modélisé par la fonction $t \mapsto u(t)$, de période $2\pi$, paire et définie par :

$$u(t) = (t-\pi)^2 \quad \text{pour } t \in [\,0;\pi\,].$$

a) Tracer dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique de la fonction $u$, pour $t$ variant entre $-2\pi$ et $6\pi$.

b) Calculer les coefficients de Fourier $a_n$ et $b_n$ de la fonction $u$.

c) Montrer que la fonction $u$ satisfait aux conditions d'application du théorème de Dirichlet. Ecrire alors le développement en série de Fourier de la fonction $u$.

3°) On suppose désormais que le signal $u$ est une tension appliquée aux bornes d'un circuit électrique. On désigne par $U_n$ la tension efficace associée à $u$.

Le carré de la tension efficace est donnée par la formule :

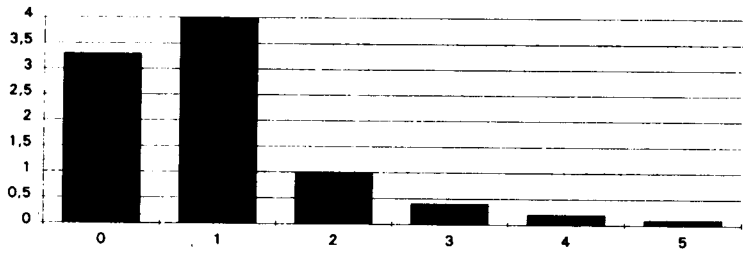
$$U_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u^2(t)\,dt$$

a) Calculer $U_{eff}^2$ et donner une approximation décimale à $10^{-3}$ près.

b) Le spectre de fréquence associé à la tension $u$ est la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$n \mapsto C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

où $a_n$ et $b_n$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $u$. La représentation graphique de ce spectre pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ est donné par la figure ci-dessous.



La formule de Parseval permet d'écrire :

$$U_{eff}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Compte tenu du spectre de fréquence, on décide de ne pas prendre en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 5. On obtient alors une approximation du carré de la tension efficace par la formule :

$$\left[U_{eff}^2\right]_1 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{n=4} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Donner une approximation décimale à $10^{-3}$ près de $\left[U_{eff}^2\right]_1$.

*La comparaison des approximations décimales de* $U_{eff}^2$ *et de* $\left[U_{eff}^2\right]_1$ *justifie l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 5.*

## CORRECTION

1°) Calcul de $I_n = \int_0^{\pi} (t-\pi)\sin(nt)\,dt$.

Effectuons une intégration par parties.

$$\begin{cases} u = t - \pi \\ dv = \sin(nt)\,dt \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} du = dt \\ v = -\dfrac{1}{n}\cos(nt) \end{cases} \qquad (n \neq 0)$$

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}(t-\pi)\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt$$

$$I_n = -\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{n}$$

$$I_n = -\frac{\pi}{n}.$$

Calcul de $A_n = \int_0^{\pi} (t-\pi)^2\cos(nt)\,dt$..

$$\begin{cases} u = (t - \pi)^2 \\ dv = \cos(nt)\,dt \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} du = 2(t-\pi)dt \\ v = \dfrac{1}{n}\sin(nt) \end{cases} \qquad (n \neq 0)$$

d'où :

$$A_n = \left[\frac{1}{n}(t-\pi)^2\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)\,dt$$

soit, puisque l'on reconnaît $I_n$ : $A_n = 0 - \dfrac{2}{n} I_n$

$$A_n = \frac{2\pi}{n^2}$$

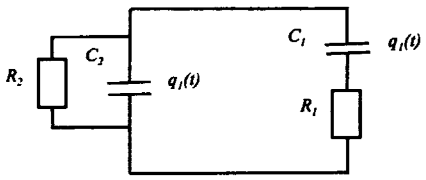
## BTS CIRA 1998

### EXERCICE 1

(10 points)

**Transformation de Laplace. Résolution d'un système d'équations différentielles.**

On considère le montage électrique suivant dans lequel les constantes $C_1$, $C_2$, $R_1$, $R_2$ sont des réels positifs caractéristiques du circuit.




Les fonctions $q_1$ et $q_2$ de la variable réelle $t$ représentent les charges des deux condensateurs du circuit lorsque $t \geq 0$.
On suppose que pour $t < 0$, $q_1(t) = q_2(t) = 0$ et que les fonctions $q_1$ et $q_2$ admettent les transformées de Laplace respectives $Q_1$ et $Q_2$.
Les lois de l'électricité montrent que les fonctions $q_1$ et $q_2$ vérifient sur $[0;+\infty[$ le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt}(t) + \dfrac{1}{R_1C_1}q_1(t) = \dfrac{1}{R_1C_2}q_2(t) \\ \dfrac{dq_2}{dt}(t) + \dfrac{1}{R_2C_2}q_2(t) = -\dfrac{dq_1}{dt}(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $q_1(0^+) = q_0$ et $q_2(0^+) = 0$ ($q_0$ réel strictement positif).

1°) En utilisant la transformation de Laplace, montrer que les fonctions $Q_1$ et $Q_2$ vérifient le système *(S)* défini par :

$$(S)\quad \begin{cases} \left(p + \dfrac{1}{R_1C_1}\right)Q_1(p) - \dfrac{1}{R_1C_2}Q_2(p) = q_0 \\ pQ_1(p) + \left(p + \dfrac{1}{R_2C_2}\right)Q_2(p) = q_0 \end{cases}$$

avec $p$ sur $[0;+\infty[$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que : $R_1C_1 = 1$, $R_2 = \dfrac{3}{5}R_1$, $C_2 = \dfrac{16}{3}C_1$.

2°)

a) Montrer que le système *(S)* s'écrit alors :

$$(S)\quad \begin{cases} (p+1)Q_1(p) - \dfrac{3}{16}Q_2(p) = q_0 \\ pQ_1(p) + \left(p + \dfrac{5}{16}\right)Q_2(p) = q_0 \end{cases}$$

b) Déterminer les expressions de $Q_1(p)$ et $Q_2(p)$.

3°)

a) Déterminer les réels $A$ et $B$ tels que pour tout réel $p$ positif, on ait :

$$\frac{1}{p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{5}{16}} = \frac{A}{p + \frac{1}{4}} + \frac{B}{p + \frac{5}{4}}.$$

En déduire que :

$$Q_2(p) = q_0\left(\frac{1}{p + \frac{1}{4}} - \frac{1}{p + \frac{5}{4}}\right)$$

b) Déterminer les réels $M$ et $N$ tels que pour tout réel $p$ positif, on ait :

$$\frac{p + \frac{1}{2}}{p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{5}{16}} = \frac{M}{p + \frac{1}{4}} + \frac{N}{p + \frac{5}{4}}$$

En déduire que :

$$Q_1(p) = q_0\left(\frac{1}{4(p + \frac{1}{4})} + \frac{3}{4(p + \frac{5}{4})}\right)$$

c) En utilisant les résultats précédents, déterminer les fonctions $q_1$ et $q_2$ sur $[0;+\infty[$.

4°) Soient $u_1$ et $u_2$ les fonctions de la variable réelle $t$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u_1(t) = \frac{1}{4}(e^{-\frac{1}{4}t} + 3e^{-\frac{5}{4}t}) \text{ et } u_2(t) = e^{-\frac{1}{4}t} - e^{-\frac{5}{4}t}.$$

a) Etudier les variations des fonctions $u_1$ et $u_2$ sur $[0;+\infty[$. Calculer $u_1(0)$, $u_2(0)$, $\lim_{t\to+\infty} u_1(t)$, $\lim_{t\to+\infty} u_2(t)$.

b) Tracer dans un même repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ les représentations graphiques des fonctions $u_1$ et $u_2$. On prendra comme unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

*Remarque sur l'énoncé du problème.*

*On demande de résoudre un système différentiel sur* $IR^+=[0;+\infty[$. *Or les équations du système contiennent les dérivées* $q_1'$ *et* $q_2'$ *qui n'ont, a priori, pas de sens au point* $t = 0$ *(*$q_1$ *et* $q_2$ *sont causales). Il faut donc faire la convention qui consiste à remplacer les nombres dérivés en* $t = 0$ *par les nombres dérivés à droite en 0.*

## CORRECTION

1°) Déterminons les transformées de Laplace des dérivées des fonctions $q_1$ et $q_2$. Les hypothèses sur la transformée d'une dérivée sont bien satisfaites d'où :

$$\mathcal{L}[\frac{dq_1}{dt}](p) = pQ_1(p) - q_1(0^+)$$

donc

$$\mathcal{L}[\frac{dq_1}{dt}](p) = pQ_1(p) - q_0 \qquad \text{(a)}$$

De même

$$\mathcal{L}[\frac{dq_2}{dt}](p) = pQ_2(p) - q_2(0^+)$$

donc :

$$\mathcal{L}[\frac{dq_2}{dt}](p) = pQ_2(p) \qquad \text{(b)}$$

En utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, le système proposé devient :

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\frac{dq_1}{dt}](p) + \frac{1}{R_1C_1}\mathcal{L}[q_1](p) = \frac{1}{R_1C_2}\mathcal{L}[q_2](p) \\ \mathcal{L}[\frac{dq_2}{dt}](p) + \frac{1}{R_2C_2}\mathcal{L}[q_2](p) = -\mathcal{L}[\frac{dq_1}{dt}](p) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} pQ_1(p) - q_0 + \frac{1}{R_1C_1}Q_1(p) = \frac{1}{R_1C_2}Q_2(p) \\ pQ_2(p) + \frac{1}{R_2C_2}Q_2(p) = -pQ_1(p) + q_0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} (p + \frac{1}{R_1C_1})Q_1(p) - \frac{1}{R_1C_2}Q_2(p) = q_0 \\ pQ_1(p) + (p + \frac{1}{R_2C_2})Q_2(p) = q_0 \end{cases}$$

2°) a) Puisque $R_1C_1=1$, $R_2 = \frac{3}{5}R_1$, $C_2 = \frac{16}{3}C_1$, nous obtenons :

$$R_1C_2 = \frac{16}{3}R_1C_1 = \frac{16}{3} \text{ et } R_2C_2 = \frac{3}{5}\times\frac{16}{3}R_1C_1 = \frac{16}{5}.$$

# BTS CIRA 1999

## EXERCICE 1

(9 points)

*A traiter par tous les candidats des spécialités CIRA - Electronique - Génie optique.*

**Série de Fourier**

**Partie 1**

*Dans cette partie, on établit des résultats mathématiques utiles pour la partie 2.*

1°) Soient $\alpha$ et $\omega$ deux réels quelconques et $n$ un entier naturel. Montrer que :

$$\cos(n\pi - n\omega\alpha) = (-1)^n \cos(n\omega\alpha) \quad \text{et} \quad \cos(n\pi + n\omega\alpha) = (-1)^n \cos(n\omega\alpha)$$

2°) Soient $T$ un réel strictement positif et $A$ un réel quelconque. Le nombre $\alpha$ désigne maintenant un réel tel que $0 < \alpha < \frac{T}{4}$.

On considère la fonction $g_\alpha$, définie sur IR, périodique, de période $T$, telle que :

$$\begin{cases} g_\alpha(t) = 0 & \text{si} \quad t \in [0, \alpha[ \\ g_\alpha(t) = A & \text{si} \quad t \in \left[\alpha, \frac{T}{2} - \alpha\right[ \\ g_\alpha(t) = 0 & \text{si} \quad t \in \left[\frac{T}{2} - \alpha, \frac{T}{2} + \alpha\right[ \\ g_\alpha(t) = -A & \text{si} \quad t \in \left[\frac{T}{2} + \alpha, T - \alpha\right[ \\ g_\alpha(t) = 0 & \text{si} \quad t \in [T - \alpha, T[ \end{cases}$$

Donner, pour $t$ variant dans l'intervalle $[0, T[$, une représentation graphique de la fonction $g_\alpha$.

3°) On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On admettra que les coefficients de Fourier $a_n$ associés à la fonction $g_\alpha$, sont tous nuls.

Calculer les coefficients de Fourier $b_n$ associés à la fonction $g_\alpha$ et montrer que :

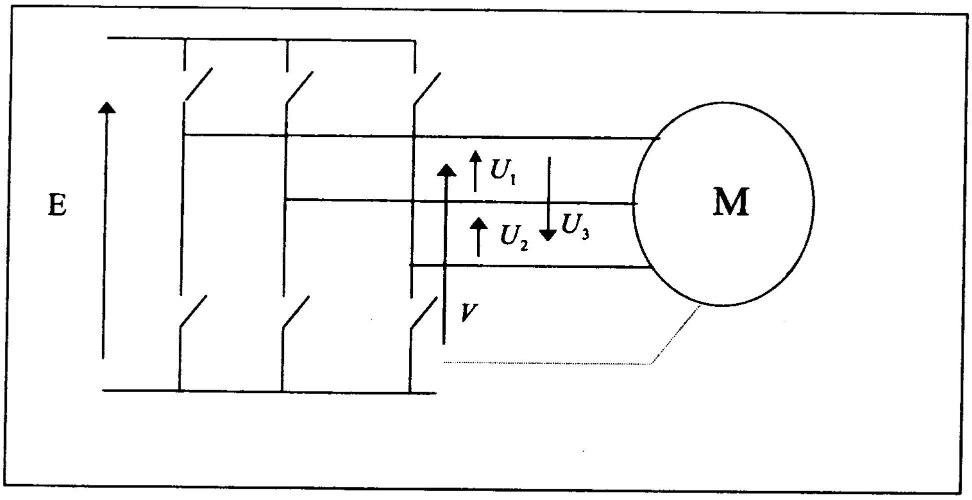
$$\begin{cases} b_{2p} = 0 \,, \; p \in IN^* \\ b_{2p+1} = \dfrac{4A}{\pi} \times \dfrac{\cos\left((2p+1)\omega\,\alpha\right)}{2p+1} \,, \; p \in IN \end{cases}$$

4°) On suppose que la fonction $g_\alpha$ vérifie les conditions d'application du théorème de Dirichlet. Soit $t \mapsto S(t)$, la somme de la série de Fourrier associée à la fonction $g_\alpha$.

Comparer $S(t)$ et $g_\alpha(t)$ pour $t$ appartenant à l'intervalle $\left[0, \frac{T}{4}\right]$.

**Partie 2**
*Aucune connaissance d'électricité n'est nécessaire pour résoudre les questions posées dans cette partie.*

On considère le schéma électrique suivant dans lequel $E$ représente une force électromotrice proportionnelle à la fréquence $f$.




Chaque interrupteur est constitué d'un transistor et d'une diode supposés parfaits. Les intervalles de fermeture des interrupteurs ont été réglés pour une période $T$. Dans ces conditions, les représentations graphiques des tensions $U_{12}$ et $U_{31}$, qui sont périodiques de période $T$, sont données, pour $t$ variant dans l'intervalle $[0,T[$, sur le document réponse 1 joint au sujet.
Les lois de l'électronique montrent que :

$$V_1 = \frac{1}{3}(U_{12} - U_{31})$$

La fonction $V_1$ est donc périodique, de période $T$.

1°) Tracer, en rouge, sur le document réponse 1, la représentation graphique de la fonction $V_1$, pour $t$ variant dans l'intervalle $[0,T[$.
Dans toute la suite de l'exercice, le nombre $A$ introduit dans la partie 1 sera pris égal à $\frac{E}{3}$.

2°) La fonction $g_0$ est définie sur IR, périodique de période $T$ et telle que :

$$\begin{cases} g_0(t) = A = \dfrac{E}{3} & \text{si} \quad t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right[ \\ g_0(t) = -A = -\dfrac{E}{3} & \text{si} \quad t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right[ \end{cases}$$

## DOCUMENT REPONSE 1
## A RENDRE AVEC LA COPIE