Exercice 1 **(8 points)**

Dans tout cet exercice, le nombre n est un entier relatif.
La suite $n \mapsto e(n)$ représente l'échelon discrétisé causal défini par :

$$\begin{cases} e(n) = 0 \ pour \ n < 0 \\ e(n) = 1 \ pour \ n \geq 0. \end{cases}$$

On considère un filtre numérique dans lequel le signal d'entrée est $n \mapsto e(n)$ et le signal de sortie est un signal discret causal noté $n \mapsto x(n)$.
Ce filtre est régi par l'équation récurrente :

$$x(n) - 2x(n-1) = e(n) \qquad (E).$$

PARTIE 1.
Dans cette partie on résout l'équation récurrente (E) sans utilisation de la transformation en Z.

1) a) Justifier que $x(0) = 1$.
   b) Calculer $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$.
2) Pour tout entier naturel n l'équation (E) s'écrit :

$$x(n) - 2x(n-1) = 1 \qquad (E).$$

   a) On considère la suite y définie pour tout entier naturel n par :

$$y(n) = x(n) + 1.$$

   Montrer que la suite y est une suite géométrique de raison 2.
   Donner l'expression de $y(n)$ en fonction de l'entier naturel n.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de $x(n)$. Vérifier que l'on retrouve les mêmes valeurs de $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ et $x(3)$ qu'à la question 1.

PARTIE 2.
Dans cette partie on résout l'équation récurrente (E) en utilisant la transformation en Z.

1) On rappelle que $x(0) = 1$.
   On se place dans le cas où $n \geq 1$ et on admet que le signal $n \mapsto x(n)$, solution de l'équation récurrente (E), a une transformation en Z noté $(Zx)(z)$.
   a) Montrer que pour tout z différent de 0, de 1 et de 2 on a :

$$(Zx)(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}.$$

   b) Montrer que pour tout z différent de 0, 1 et 2 on a :

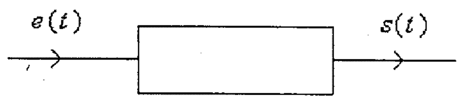
$$\frac{(Zx)(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}.$$

   c) En déduire par lecture inverse du dictionnaire d'images, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$ pour $n \geq 1$.

2) Représenter dans un repère orthogonal, pour les nombres entiers n tels que $-2 \leq n \leq 3$, le signal de sortie $n \mapsto x(n)$. Prendre comme unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 2 (12 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.



Dans le système représenté ci-dessus, e et s sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, causaux (nuls pour t négatif).

On suppose que le système est régi par l'équation différentielle :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t)+RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t)+s(t)=e(t) \quad (1).$$

L, R et C sont des constantes réelles strictement positives. De plus à l'instant initial :

$$s\left(0^+\right)=0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+)=0.$$

PARTIE A

On suppose que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

1°) La fonction de transfert H du système est définie par $S(p)=H(p)\times E(p)$.
En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (1), exprimer $H(p)$ en fonction de R, L et C.

2°) On suppose que $e(t)=\mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-2)$

où $\mathcal{U}$ est la fonction échelon unité : $\begin{cases}\mathcal{U}(t)=0 & \text{si } t<0\\ \mathcal{U}(t)=1 & \text{si } t\geq 0\end{cases}$

a) Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère du plan.
b) Déterminer $E(p)$.

3°) **Dans la suite de l'exercice, on considère que $L=2$, $R=1000$ et $C=2.10^{-6}$.**

a) Vérifier que $H(p)=\dfrac{500^2}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}$.

b) On admet que :

$$\frac{1}{p}H(p)=\frac{1}{p}-\frac{p+250}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}-\frac{250}{(p+250)^2+\left(250\sqrt{3}\right)^2}.$$

Déterminer l'original h_1 de la fonction $p \mapsto \dfrac{1}{p} H(p)$.

c) Exprimer $s(t)$ à l'aide de $h_1(t)$.
En déduire l'expression de $s(t)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $[1, 2[$ et $[2, +\infty[$.

PARTIE B

On rappelle que $H(p) = \dfrac{500^2}{(p+250)^2 + \left(250\sqrt{3}\right)^2}$.

1°) On considère la fonction r définie pour tout réel $\omega > 0$ par :

$$r(\omega) = \left| H(\mathrm{j}\omega) \right|$$

où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $r(\omega) = \dfrac{500^2}{\sqrt{\omega^4 - 500^2\omega^2 + 500^4}}$.

2°) On considère la fonction f définie pour tout réel $\omega > 0$ par :

$$f(\omega) = \omega^4 - 500^2\omega^2 + 500^4.$$

Montrer que $f'(\omega) = 4\omega\left(\omega - 250\sqrt{2}\right)\left(\omega + 250\sqrt{2}\right)$.

3°) Montrer que $r'(\omega)$ est du signe de $-f'(\omega)$.

4°) En déduire que $r(\omega)$ est maximal pour une valeur ω_0 de ω. Donner la valeur de ω_0 et calculer $r(\omega_0)$.

La partie B permet de déterminer le maximum du gain pour le système étudié en régime harmonique.