EXERCICE 1 (*9 points*)

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[\,0\,;\pi\,]$ par $g(t)=\left(1+\cos^2 t\right)\sin^2 t$.

a) Montrer que $g'(t)=4\sin t\cos^3 t$.

b) En déduire les variations de g sur $[\,0\,;\pi\,]$.

2. Soit la fonction numérique f définie sur R, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{2}-\tau & \text{si } 0\leq t<\tau \\ f(t)=-\tau & \text{si } \tau\leq t\leq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

où τ est un nombre réel tel que $0<\tau<\dfrac{1}{2}$.

a) **Uniquement dans cette question**, on prendra $\tau=\dfrac{1}{6}$.

Représenter la fonction f sur l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$ dans un repère orthonormal.

b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.
Montrer que :

$$S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,\pi}\sin(2n\,\pi\tau)\cos(2n\,\pi t).$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
Soit la fonction numérique h définie sur R par :

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t)+\frac{1}{2\,\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t).$$

On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.

a) À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.

b) Montrer que $E_h^2=\dfrac{1}{2\,\pi^2}g(2\pi\tau)$.

4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

EXERCICE 2 (*11 points*)

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.
On note $\omega(t)$ la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.

La fonction ω est solution de l'équation différentielle : $\frac{1}{200} y'(t) + y(t) = 146$ **(1)**,
où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(1)**.
On cherchera une solution particulière constante.

b) Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4e^{-200\,t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2. a) On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$ due au couple résistant.

b) On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right|$ est inférieur à 1%.
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation γ du couple résistant sur la vitesse de rotation du moteur.
On note $f(t)$ la différence, à l'instant t, entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.
La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200} f'(t) + f(t) = \gamma(t) \text{ avec } f(0^+) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

On admet que la fonction f possède une transformée de Laplace notée F.
La fonction γ est définie par $\gamma(t) = K\left[U(t) - U(t-\tau)\right]$ où τ et K sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et U est la fonction échelon unité ($U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$).

1. a) Représenter la fonction γ pour $\tau = 0{,}005$ et $K = 0{,}2$.

b) Déterminer, en fonction de τ et K, la transformée de Laplace Γ de la fonction γ.

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle **(2)**, déterminer $F(p)$.

3. **a)** Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{200}{p(p+200)}=\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{p+200}$ pour tout réel p strictement positif.

b) En déduire l'original f de la fonction F. On vérifiera notamment que :

$$\begin{cases} f(t)=K\left(1-\mathrm{e}^{-200t}\right) & \text{si } t\in[0,\tau[\\ f(t)=K\left(\mathrm{e}^{200\tau}-1\right)\mathrm{e}^{-200t} & \text{si } t\in[\tau,+\infty[\end{cases}.$$

c) Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $[0,\tau[$ et $[\tau,+\infty[$.
Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ces deux intervalles.

d) Représenter la fonction f pour $\tau=0{,}005$ et $K=0{,}2$.
On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions γ et f dans le même repère.