Exercice 1 (*11 points*)

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés d'un filtre numérique N et de comparer des effets de ce filtre avec ceux d'un filtre analogique A.

Partie I

On rappelle que tout signal discret causal est nul pour tout nombre entier strictement négatif.

Soient $x(n)$ et $y(n)$ les termes généraux respectifs de deux signaux discrets causaux représentant, respectivement, l'entrée et la sortie du filtre numérique N. Ce filtre est conçu de telle sorte que, pour tout nombre entier n positif ou nul, on a :

$$y(n)-y(n-2)=0{,}04x(n-1).$$

1. On note Zx et Zy les transformées en Z respectives des signaux causaux x et y. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 et 1, on a :

$$(Zy)(z)=\frac{0{,}04z}{(z-1)(z+1)}(Zx)(z).$$

2. On suppose que le signal d'entrée est l'échelon unité discret :

$$x(n)=e(n) \text{ avec } e(n)=\begin{cases}0 & \text{si } n<0\\ 1 & \text{si } n\geq 0\end{cases}.$$

a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 et 1, on a :

$$(Zy)(z)=\frac{0{,}04z^2}{(z-1)^2(z+1)}.$$

b) Calculer les constantes réelles A, B et C telles que :

$$\frac{0{,}04z}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{\mathrm{A}}{(z-1)^2}+\frac{\mathrm{B}}{z-1}+\frac{\mathrm{C}}{z+1}.$$

c) En remarquant que :

$$\frac{(Zy)(z)}{z}=\frac{0{,}04z}{(z-1)^2(z+1)}$$

montrer que, pour tout nombre entier n positif ou nul, on a :

$$y(n)=0{,}02n+0{,}01\left(1-(-1)^n\right).$$

d) Déterminer $y(2k)$ puis $y(2k+1)$ pour tout nombre entier naturel k.

e) En déduire que pour tout nombre entier naturel k, on a : $y(2k+1)=y(2k+2)$.

f) Représenter graphiquement les termes du signal causal y lorsque le nombre entier n est compris entre -2 et 5.

Partie II

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ U(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}.$$

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t) = \sin(20t)U(t).$$

On note F la transformée de Laplace de la fonction f. Le signal de sortie du filtre analogique A est représenté par la fonction s dont la transformée de Laplace S est telle que :

$$S(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

1. Justifier que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u.$$

2. En déduire que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :

$$s(t) = \frac{1-\cos(20t)}{20}.$$

3. Donner sans justification la valeur maximale et la valeur minimale de la fonction s.

4. Tracer, sur le graphique du document réponse, l'allure de la courbe représentative de la fonction s.
Il n'est pas demandé d'étudier la fonction s.

La figure du document réponse montre une simulation du résultat obtenu en sortie du filtre numérique soumis à une version échantillonnée de la fonction f, lorsque la période d'échantillonnage est 0,02.

Exercice 2 (*9 points*)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soient α et β deux nombres réels.

Soit *f* une fonction périodique de période 1, définie sur l'intervalle [0 ; 1[par $f(t) = \alpha t + \beta$.

On appelle a_0, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à la fonction *f*.

1. Montrer que $a_0 = \dfrac{\alpha}{2} + \beta$.

2. Montrer que $b_n = -\dfrac{\alpha}{n\pi}$ pour tout nombre entier naturel *n* non nul.

On admet que $a_n = 0$ pour tout nombre entier naturel *n* non nul.

3. On se propose de déterminer les nombres réels α et β pour que le développement *S* en série de Fourier de la fonction *f* soit défini pour tout nombre réel *t* par $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \sin(2n\pi t)$.

a) Déterminer les nombres réels α et β tels que $a_0 = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel *n* non nul.
En déduire l'expression de la fonction *f*.

b) Représenter la fonction *f* sur l'intervalle [-2 ; 2] dans un repère orthogonal.

Partie B

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = f(t) \ .$$

On admet que l'on obtient une bonne approximation de la fonction *s* en remplaçant $f(t)$ par les premiers termes du développement en série de Fourier de la fonction *f* obtenus dans la partie A, c'est-à-dire par :

$$\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t).$$

Soit (E) l'équation différentielle :

$$s''(t) + s(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t).$$

1. Vérifier que la fonction s_1 définie pour tout nombre réel *t* par :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E).

Document à rendre avec la copie