

# Brevet de Technicien Supérieur Groupement A

MATHÉMATIQUES

SESSION 2013

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3
INFORMATIQUE ET RÉSEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	3	3
SYSTÈMES ÉLECTRONIQUES	2	3
ÉLECTROTECHNIQUE	2	3
GÉNIE OPTIQUE	3	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

**Matériel autorisé :**

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

*Circulaire 99-186 du 16 novembre 1999*

**Document à rendre et à agraffer avec la copie :**

Document réponse .....page 8/9

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

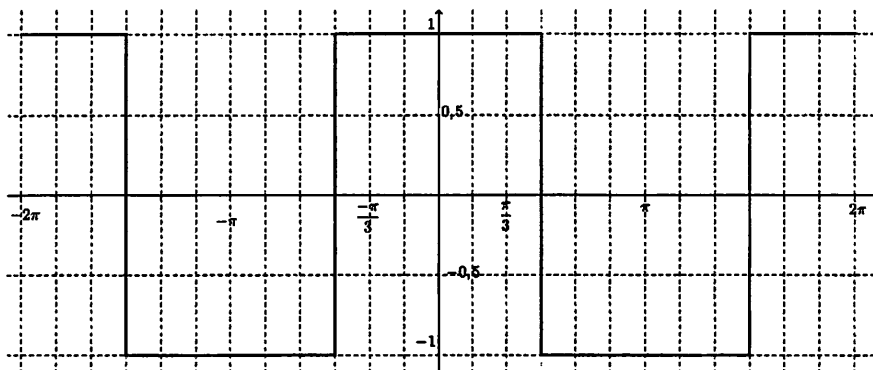
BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 1/9

## EXERCICE 1 (10 points)

Cet exercice comporte 2 parties indépendantes. Il traite de l'équilibre de systèmes triphasés. Aucune connaissance sur ces systèmes n'est nécessaire pour traiter l'intégralité de cet exercice.

### Partie A

Un onduleur à commande asynchrone délivre une tension périodique  $f(t)$  de période  $2\pi$  selon la représentation graphique suivante :



- Sur l'annexe n° 1, on a représenté graphiquement sur  $[-2\pi; 2\pi]$  la tension  $f(t)$  et la tension  $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ .  
Sur le document réponse, compléter le tableau de valeurs et construire la représentation graphique de la tension  $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$  sur  $[-2\pi; 2\pi]$ .
- En régime triphasé, l'onduleur soumet la phase 1 à la tension  $f(t)$ , la phase 2 à la tension  $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$  et la phase 3 à  $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$ . Le neutre, quant à lui, est soumis à la somme  $S(t)$  des tensions des phases, définie par

$$S(t) = f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

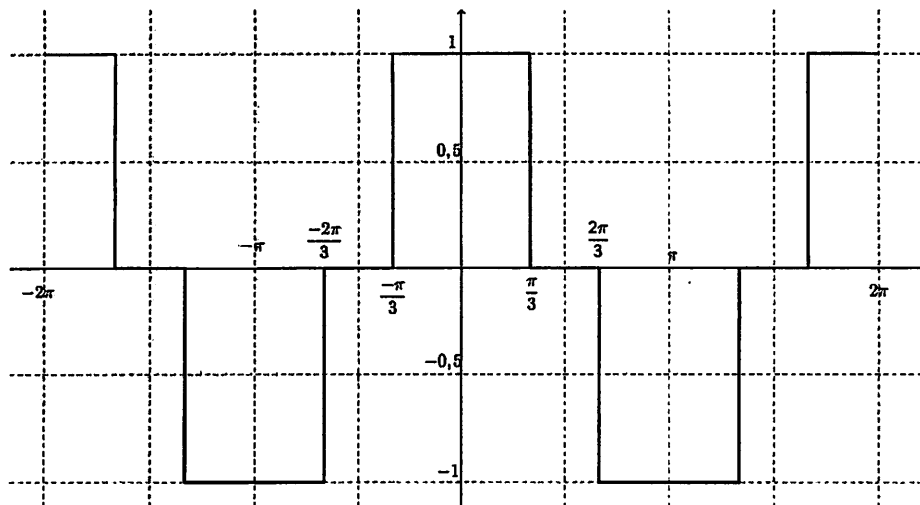
Si cette somme est nulle pour tout nombre réel  $t$ , le système triphasé est équilibré. Sinon, le système est déséquilibré.

- Calculer  $S(0)$ .
- Le système triphasé étudié dans cette partie est-il équilibré?

### Partie B

Pour garantir l'équilibrage d'un système triphasé, on peut utiliser un onduleur à commande décalée. Ainsi, nous considérons dans cette partie que la tension délivrée est un signal  $g$  de période  $2\pi$ , dont la représentation graphique sur  $[-2\pi; 2\pi]$  figure ci-après :

BTS	Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA <span style="float: right;">Page : 2/9</span>



On s'intéresse au développement en série de Fourier du signal  $g$ .

Dans la suite de l'exercice,  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  désignent les coefficients du développement en série de Fourier de ce signal  $g$ , avec les notations du formulaire.

1. Déterminer  $a_0$ .
2. Préciser la valeur des coefficients  $b_n$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.
3. (a) Donner la valeur de  $g(t)$  sur chacun des intervalles  $]0; \frac{\pi}{3}[$ ,  $]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$  et  $]\frac{2\pi}{3}; \pi[$ .  
 (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n}.$$

4. (a) Vérifier que  $a_{3k} = 0$ , pour tout nombre entier naturel  $k$  non nul.  
 (b) On démontre que ce qui empêche un signal d'être nul dans le neutre est la présence d'harmoniques non nulles de rangs multiples de 3 dans le développement en série de Fourier du signal  $g$ .  
 Peut-on considérer que le système triphasé est équilibré, c'est à dire que la tension sur le neutre est nulle?

*Remarque : Dans les hôpitaux, les banques, les lycées, etc., l'énergie électrique est fournie par des transformateurs ou par les onduleurs qui alimentent une multitude de récepteurs (ordinateurs, lampes basse-consommation...) qui génèrent des courants harmoniques. Sans une installation adaptée et sans une utilisation de récepteurs optimisés, l'accumulation d'harmoniques de rangs multiples de 3 conduit au déséquilibre du système triphasé. Ceci peut engendrer de graves problèmes : surchauffe du fil portant le neutre, phénomènes d'interférence, augmentation des pertes d'énergie, ouverture des fusibles ou interrupteurs automatiques...*

BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 3/9

## EXERCICE 2 (10 points)

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

On notera  $U$  la fonction échelon unité définie pour tout nombre réel  $t$  par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle  $] -\infty; 0[$ . On considère un système entrée-sortie où les signaux d'entrée et sortie sont modélisés par des fonctions causales notées respectivement  $e$  et  $s$ . Ce système est du second ordre, c'est à dire que les fonctions  $e$  et  $s$  sont liées sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par une équation différentielle du type

$$s''(t) + b s'(t) + c s(t) = c e(t),$$

où  $b$  et  $c$  désignent des constantes réelles.

On suppose de plus dans tout l'exercice que  $s(0) = 0$  et  $s'(0) = 0$ .

### Partie A : résolution d'une équation différentielle du second ordre

Dans cette partie, on suppose que  $b = 1$  et  $c = 0,25$ . De plus, le signal d'entrée, constant, est défini pour tout nombre réel  $t$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $e(t) = 10$ .

La fonction causale  $s$  est donc solution sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + y' + 0,25y = 2,5.$$

1. Déterminer une fonction constante sur  $[0; +\infty[$  solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y'' + y' + 0,25y = 0$ .
3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
4. Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle est celle de  $s(t)$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  ?

Recopier la réponse choisie sur la copie.

- $5te^{-0,5t}$
- $10 - (5t + 10)e^{-0,5t}$
- $10 - (2,5t + 10)e^{-0,25t}$
- $10 - (10t + 10)e^{-0,5t}$

BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 4/9

## Partie B : utilisation de la transformation de Laplace

Dans cette partie, on suppose que  $b = 0$  et  $c = 9$ . De plus, le signal d'entrée, sinusoïdal, est défini pour tout nombre réel  $t$  par

$$e(t) = \sin(2t)U(t).$$

La fonction causale  $s$  est donc solution de l'équation différentielle

$$(E') : s''(t) + 9s(t) = 9 \sin(2t)U(t).$$

On note  $S$  la transformée de Laplace de la fonction  $s$ .

1. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle  $(E')$ , montrer que

$$S(p) = \frac{18}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.$$

2. Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre réel  $p$ , on ait

$$S(p) = \frac{a}{p^2 + 4} + \frac{b}{p^2 + 9}.$$

3. En déduire l'expression de  $s(t)$  pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul.

## Partie C : détermination de l'amplitude du signal de sortie

On note  $f$  la fonction causale définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(t) = (1,8 \sin(2t) - 1,2 \sin(3t)) U(t).$$

Cette fonction est périodique de période  $2\pi$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Sur l'annexe 2 sont tracées deux représentations graphiques de la fonction  $f$ .

Les points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  indiqués sur le graphique correspondent aux extremums locaux de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

Le but de cette partie est de déterminer la valeur maximale  $A$  atteinte par  $f(t)$  quand  $t$  varie dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

1. En utilisant la figure 1 de l'annexe 2, déterminer une valeur approchée de  $A$  à 0,1 près.
2. Pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul, calculer une expression de  $f'(t)$ .

BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 5/9

3. (a) Montrer que, pour tout nombre réel positif ou nul  $t$ ,  $f'(t)$  peut se mettre sous la forme

$$f'(t) = \alpha \sin\left(\frac{5t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

où  $\alpha$  est un nombre réel strictement positif.

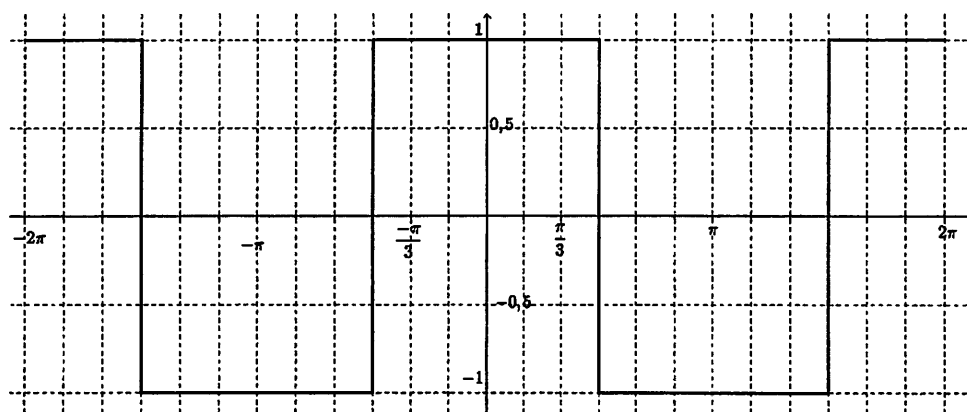
En déduire la valeur de  $f'\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$  pour tout nombre entier naturel  $k$ .

- (b) Déterminer les valeurs exactes des abscisses des points  $M_1, M_2, M_3, M_4$ .  
En déduire une valeur approchée de  $A$  à  $10^{-3}$  près.

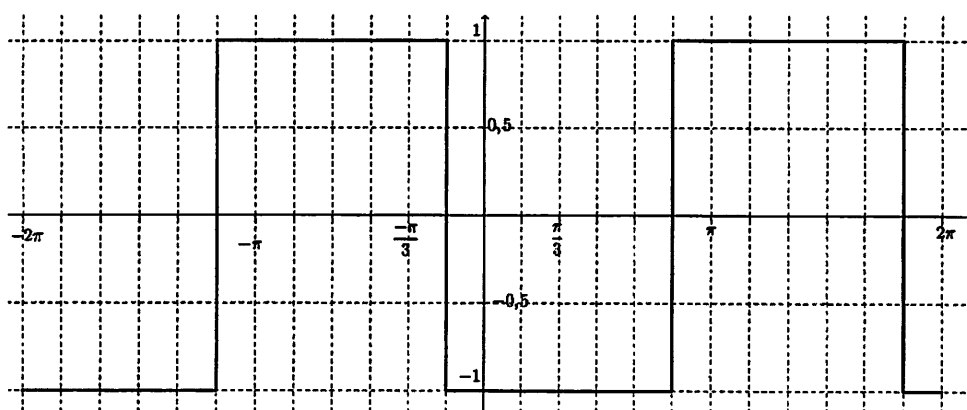
BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 6/9

## Annexe 1

Représentation graphique de la tension  $f(t)$



Représentation graphique de la tension  $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$



BTS	Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA <span style="float: right;">Page : 7/9</span>

Annexe 2

Figure 1

