

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS : GROUPEMENT A

**Contrôle industriel
et régulation automatique**

Électronique

Électrotechnique

Génie optique

Informatique industrielle

Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

I. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$

$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$

$e^{a+it} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0$.

b) Dérivées et primitives*Fonctions usuelles*

| $f(t)$ | $f'(t)$ | $f(t)$ | $f'(t)$ |
|--------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| $\ln t$ | $\frac{1}{t}$ | $\text{Arc sin } t$ | $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ |
| e^t | e^t | $\text{Arc tan } t$ | $\frac{1}{1+t^2}$ |
| $t^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$ | $\alpha t^{\alpha-1}$ | $e^{at} \ (a \in \mathbb{C})$ | ae^{at} |
| $\sin t$ | $\cos t$ | | |
| $\cos t$ | $-\sin t$ | | |
| $\tan t$ | $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$ | | |

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégralValeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$$

d) Développement limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

| Équations | Solutions sur un intervalle I |
|----------------------------|--|
| $a(t)x' + b(t)x = 0$ | $f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$ |
| $ax'' + bx' + cx = 0$ | Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique |
| équation caractéristique : | Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt} \dots$ où r est la racine double de l'équation caractéristique |
| $ar^2 + br + c = 0$ | Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. |
| de discriminant Δ | |

3. SERIES DE FOURIER

f : fonction périodique de période T ;

développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad c_0 = a_0; \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

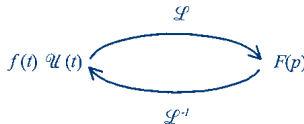
4. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}; \quad \mathcal{L}(t^n \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^{n+1}}; \quad \mathcal{L}(t^n \mathcal{U}(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\mathcal{L}(e^{-at} \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p+a}; \quad \mathcal{L}(\sin(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}(\cos(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Propriétés



| | |
|---|---|
| $f(\alpha t) \mathcal{U}(t) \quad \alpha > 0$ | $\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ |
| $f(t-\tau) \mathcal{U}(t-\tau)$ | $F(p) e^{-\tau p}$ |
| $f(t) e^{-at} \mathcal{U}(t)$ | $F(p+a)$ |
| $f'(t) \mathcal{U}(t)$ | $pF(p) - f(0^+)$ |
| $f''(t) \mathcal{U}(t)$ | $p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$ |
| $-t f(t) \mathcal{U}(t)$ | $F'(p)$ |
| $\int_0^t f(u) \mathcal{U}(u) du$ | $\frac{F(p)}{p}$ |

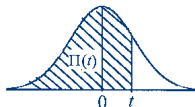
5. TRANSFORMATION EN Z

| Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ | Transformée en Z $z \mapsto (Zx)(z)$ |
|---|---|
| $e(n) = 1$ | $(Ze)(z) = \frac{z}{z-1}$ |
| $\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$ | $(Zd)(z) = 1$ |
| $r(n) = n$ | $(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ |
| $c(n) = n^2$ | $(Zc)(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| $f(n) = a^n, a \in \mathbb{R} - \{0\}$ | $(Zf)(z) = \frac{z}{z-a}$ |
| $y(n) = a^n x(n), a \in \mathbb{R} - \{0\}$ | $(Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)$ |
| $y(n) = x(n - n_0), (n - n_0) \in \mathbb{N}$ ou $y(n) = x(n - n_0) e(n - n_0)$ | $(Zy)(z) = z^{-n_0} (Zx)(z)$ |
| $y(n) = x(n + 1)$ | $(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0)]$ |
| $y(n) = x(n + 2)$ | $(Zy)(z) = z^2[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$ |
| $y(n) = x(n + n_0), n_0 \in \mathbb{N}^*$ | $(Zy)(z) = z^{n_0} [(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \dots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}]$ |

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



| t | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,500 0 | 0,504 0 | 0,508 0 | 0,512 0 | 0,516 0 | 0,519 9 | 0,523 9 | 0,527 9 | 0,531 9 | 0,535 9 |
| 0,1 | 0,539 8 | 0,543 8 | 0,547 8 | 0,551 7 | 0,555 7 | 0,559 6 | 0,563 6 | 0,567 5 | 0,571 4 | 0,575 3 |
| 0,2 | 0,579 3 | 0,583 2 | 0,587 1 | 0,591 0 | 0,594 8 | 0,598 7 | 0,602 6 | 0,606 4 | 0,610 3 | 0,614 1 |
| 0,3 | 0,617 9 | 0,621 7 | 0,625 5 | 0,629 3 | 0,633 1 | 0,636 8 | 0,640 6 | 0,644 3 | 0,648 0 | 0,651 7 |
| 0,4 | 0,655 4 | 0,659 1 | 0,662 8 | 0,666 4 | 0,670 0 | 0,673 6 | 0,677 2 | 0,680 8 | 0,684 4 | 0,687 9 |
| 0,5 | 0,691 5 | 0,695 0 | 0,698 5 | 0,701 9 | 0,705 4 | 0,708 8 | 0,712 3 | 0,715 7 | 0,719 0 | 0,722 4 |
| 0,6 | 0,725 7 | 0,729 0 | 0,732 4 | 0,735 7 | 0,738 9 | 0,742 2 | 0,745 4 | 0,748 6 | 0,751 7 | 0,754 9 |
| 0,7 | 0,758 0 | 0,761 1 | 0,764 2 | 0,767 3 | 0,770 4 | 0,773 4 | 0,776 4 | 0,779 4 | 0,782 3 | 0,785 2 |
| 0,8 | 0,788 1 | 0,791 0 | 0,793 9 | 0,796 7 | 0,799 5 | 0,802 3 | 0,805 1 | 0,807 8 | 0,810 6 | 0,813 3 |
| 0,9 | 0,815 9 | 0,818 6 | 0,821 2 | 0,823 8 | 0,825 4 | 0,828 9 | 0,831 5 | 0,834 0 | 0,836 5 | 0,838 9 |
| 1,0 | 0,841 3 | 0,843 8 | 0,846 1 | 0,848 5 | 0,850 8 | 0,853 1 | 0,855 4 | 0,857 7 | 0,859 9 | 0,862 1 |
| 1,1 | 0,864 3 | 0,866 5 | 0,868 6 | 0,870 8 | 0,872 9 | 0,874 9 | 0,877 0 | 0,879 0 | 0,881 0 | 0,883 0 |
| 1,2 | 0,884 9 | 0,886 9 | 0,888 8 | 0,890 7 | 0,892 5 | 0,894 4 | 0,896 2 | 0,898 0 | 0,899 7 | 0,901 5 |
| 1,3 | 0,903 2 | 0,904 9 | 0,906 6 | 0,908 2 | 0,909 9 | 0,911 5 | 0,913 1 | 0,914 7 | 0,916 2 | 0,917 7 |
| 1,4 | 0,919 2 | 0,920 7 | 0,922 2 | 0,923 6 | 0,925 1 | 0,926 5 | 0,927 9 | 0,929 2 | 0,930 6 | 0,931 9 |
| 1,5 | 0,933 2 | 0,934 5 | 0,935 7 | 0,937 0 | 0,938 2 | 0,939 4 | 0,940 6 | 0,941 8 | 0,942 9 | 0,944 1 |
| 1,6 | 0,945 2 | 0,946 3 | 0,947 4 | 0,948 4 | 0,949 5 | 0,950 5 | 0,951 5 | 0,952 5 | 0,953 5 | 0,954 5 |
| 1,7 | 0,955 4 | 0,956 4 | 0,957 3 | 0,958 2 | 0,959 1 | 0,959 9 | 0,960 8 | 0,961 6 | 0,962 5 | 0,963 3 |
| 1,8 | 0,964 1 | 0,964 9 | 0,965 6 | 0,966 4 | 0,967 1 | 0,967 8 | 0,968 6 | 0,969 3 | 0,969 9 | 0,970 6 |
| 1,9 | 0,971 3 | 0,971 9 | 0,972 6 | 0,973 2 | 0,973 8 | 0,974 4 | 0,975 0 | 0,975 6 | 0,976 1 | 0,976 7 |
| 2,0 | 0,977 2 | 0,977 9 | 0,978 3 | 0,978 8 | 0,979 3 | 0,979 8 | 0,980 3 | 0,980 8 | 0,981 2 | 0,981 7 |
| 2,1 | 0,982 1 | 0,982 6 | 0,983 0 | 0,983 4 | 0,983 8 | 0,984 2 | 0,984 6 | 0,985 0 | 0,985 4 | 0,985 7 |
| 2,2 | 0,986 1 | 0,986 4 | 0,986 8 | 0,987 1 | 0,987 5 | 0,987 8 | 0,988 1 | 0,988 4 | 0,988 7 | 0,989 0 |
| 2,3 | 0,989 3 | 0,989 6 | 0,989 8 | 0,990 1 | 0,990 4 | 0,990 6 | 0,990 9 | 0,991 1 | 0,991 3 | 0,991 6 |
| 2,4 | 0,991 8 | 0,992 0 | 0,992 2 | 0,992 5 | 0,992 7 | 0,992 9 | 0,993 1 | 0,993 2 | 0,993 4 | 0,993 6 |
| 2,5 | 0,993 8 | 0,994 0 | 0,994 1 | 0,994 3 | 0,994 5 | 0,994 6 | 0,994 8 | 0,994 9 | 0,995 1 | 0,995 2 |
| 2,6 | 0,995 3 | 0,995 5 | 0,995 6 | 0,995 7 | 0,995 9 | 0,996 0 | 0,996 1 | 0,996 2 | 0,996 3 | 0,996 4 |
| 2,7 | 0,996 5 | 0,996 6 | 0,996 7 | 0,996 8 | 0,996 9 | 0,997 0 | 0,997 1 | 0,997 2 | 0,997 3 | 0,997 4 |
| 2,8 | 0,997 4 | 0,997 5 | 0,997 6 | 0,997 7 | 0,997 7 | 0,997 8 | 0,997 9 | 0,997 9 | 0,998 0 | 0,998 1 |
| 2,9 | 0,998 1 | 0,998 2 | 0,998 2 | 0,998 3 | 0,998 4 | 0,998 4 | 0,998 5 | 0,998 5 | 0,998 6 | 0,998 6 |

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

| t | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,8 | 4,0 | 4,5 |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\Pi(t)$ | 0,998 65 | 0,999 04 | 0,999 31 | 0,999 52 | 0,999 66 | 0,999 76 | 0,999 841 | 0,999 928 | 0,999 968 | 0,999 997 |

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$